

Dev n° 40Titre: Lotka- VolterraThm:

On considère le système suivant:

$$(E) \quad \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{avec } a, b, c, d > 0 \text{ et } x_0, y_0 \geq 0.$$

Alors, il existe une unique solution globale de (E).

De plus, la fonction $t \mapsto (x(t), y(t))$ est périodique.

Interprétation:

- x quantité de proies
- y quantité de prédateurs
- a taux de reproduction des proies
- b taux de mortalité des proies en présence de prédateurs
- c taux de mortalité des prédateurs
- d taux de reproduction des prédateurs en fonction du nb de proies

Démo:• Étape 1: Existence et unicité

On pose:

$$Y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f(Y) := \begin{bmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{bmatrix}.$$

La fonction f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ car polynomiale, donc localement lip.

On peut donc appliquer le thm de Cauchy-Lipschitz:

$\exists!$ sol maximal α (E) q'on not (Y, I) avec $I \subset \mathbb{R}$.

• Étape 2: Positivité des solutions

On remarque:

- ↳ par $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$, on a $(x(t), y(t)) = (0, y_0 e^{-ct})$ sol. de (E) sur $\mathbb{R}$;
- ↳ par $y_0 = 0$ et $x_0 > 0$, on a $(x(t), y(t)) = (x_0 e^{-at}, 0)$ sol. de (E) sur $\mathbb{R}$;
- ↳ par $y_0 = x_0 = 0$, on a $(x(t), y(t)) = (0, 0)$ sol. de (E) sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par unicité des solutions du pb de Cauchy (E), si x_0 et $y_0 > 0$, alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0, \forall t \in I$. (car fs solutions ne peuvent se croiser)

On considère maintenant $x_0, y_0 > 0$.

• Étape 3: Points d'équilibres

On cherche:

$$f(Y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \end{cases}$$

$$L \quad y(-c + dx) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = a/b \\ x = c/d \end{cases}$$

• Étape 4: Intégrale première

Posons :

$$H(x, y) = dx + by - c \ln(x) - a \ln(y).$$

M.g. H est une intégrale première de (E) : $H(x(t), y(t)) = H(x_0, y_0) := C_0, \forall t \in I$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) &= dx' + by' - c \frac{x'}{x} - a \frac{y'}{y} \\ &= dx(\cancel{a - by}) + b y(\cancel{-c + dx}) - c(\cancel{a - by}) - a(\cancel{-c + dx}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $H = C_0, \forall t \in I$.

• Étape 5: Solutions globales $I = \mathbb{R}$

Posons :

$$f_{\alpha, \beta}(u) = \beta u - \alpha \ln(u) \text{ avec } \alpha, \beta > 0.$$

On a :

$$f'_{\alpha, \beta}(u) = \beta - \frac{\alpha}{u} \quad \text{et} \quad f''_{\alpha, \beta}(u) = \frac{\alpha}{u^2} > 0$$

Donc, f est strictement convexe et admet un unique minimum globale en $\frac{\alpha}{\beta}$.
De plus, $\forall t \in I$,

$$H(x(t), y(t)) = f_{a,b}(y(t)) + f_{c,d}(x(t)) = C_0$$

Donc,

$$f_{c,d}(x) \leq C_0 - f_{a,b}\left(\frac{a}{b}\right)$$

Ainsi, $\forall t \in I$, $x(t)$ est bornée et de même par $y(t)$.
Ainsi, par le thm de sortie de tout compact: $I = \mathbb{R}$.

• Étape 6: Isoclines

On a :

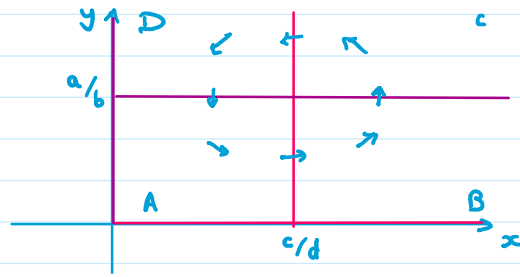
$$I_1 = \{(x, y) \mid ax - by = 0\} = \{x=0\} \cup \{y = \frac{a}{b}\}$$

$$I_2 = \{(x, y) \mid -cy + dx = 0\} = \{y=0\} \cup \{x = \frac{c}{d}\}$$



• Étape 7: Étude de la trajectoire





S.q. $(x_0, y_0) \in A$ et par l'absurde, s.q. $(x(t), y(t)) \in A, \forall t \in \mathbb{R}$.
On a x est croissant et majoré par $\frac{c}{d}$, donc cv:

$$\exists x^* \in]0; \frac{c}{d}[; \quad x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} x^*.$$

On a y est décroissant et minoré par 0, donc cv:

$$\exists y^* \in]0; \frac{a}{b}[; \quad y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} y^*.$$

Donc, (x^*, y^*) est un point d'équilibre.

Or :

$$x^* > x(t) \geq x_0 > 0 \quad \text{et} \quad y^* \leq y(t) \leq y_0 < \frac{a}{b}$$

ABSURDE.

Ainsi, $\exists t_1 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x(t_1) = \frac{c}{d}$

De même, la trajectoire passe de B à C, de C à D et de D à A.

Annexe:

• Étape 8: Solutions périodiques

Soit $\Gamma(t) = (x(t), y(t)), \forall t \in \mathbb{R}$.

Il y a $\Gamma(t_2) = \Gamma(t_1)$.

On a $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$ avec $x_1 = x_2 = \frac{c}{d}$.

Donc, on a:

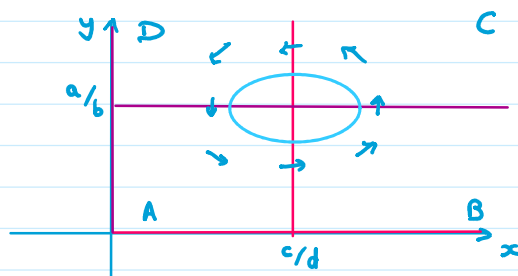
$$b y_1 - a \ln(y_1) = b y_2 - a \ln(y_2)$$

or $f_{a,b}(u)$ injective sur $]0; \frac{a}{b}[$ car strictement décroissante.

Donc,

$$\Gamma(t_2) = \Gamma(t_1).$$

Donc les trajectoires sont périodiques $\square$



* Proposition:

$f \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow$ loc. p.p.

* Proposition :

$f \in C^1(I) \Rightarrow f \text{ loc. lip.}$

Démo :

$$f \in C^1 : f(x) = f(y) + |x-y| f'(\alpha) \quad \alpha \in]x,y[$$

$$\text{On a } \forall x,y \in I : \|f(x) - f(y)\| \leq \underbrace{\|f'(y)\|}_L \|x-y\|$$

Donc $f \text{ loc. lip.}$

* Thm Cauchy Lip :

Théorème (Cauchy-Lipschitz) : Soit l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, avec f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. Si (t_0, y_0) est un point de U , il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $y' = f(t, y)$, et $y(t_0) = y_0$. Cette solution est définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 . En outre, toute autre solution à ce même problème de Cauchy est restriction de la solution maximale.

* Les solutions ne se croisent pas :

Soit I l'intervalle associé à (E) . $\forall$ sol.

Sq $\exists \tilde{t} \in I$ t.q. $x(\tilde{t}) = 0$, alors d'après le thm des valeurs intermédiaires, $\exists t^* \in I$ premier temps t.q. $x(t^*) = 0$.

La fonction $\tilde{y} : t \mapsto (x(t), y(t)) = (0, y(t^*) e^{-c(t-t^*)})$ est sol. de (E)

D'après le principe d'unicité on a $x = \tilde{y}$, $\forall t \in I$.

ABSURDE car $x_0 > 0$.

De même par $y(t)$.

* Thm sortie de tout compact :

Énoncé du lemme [modifier | modifier le code]

Soit $f : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction qui satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et

$x :]t^-, t^+[\subseteq J \rightarrow U$ une solution de l'équation $x' = f(t, x)$. La solution est maximale à droite si et seulement si

- soit $t^+ = \sup J$;
- soit $t^+ < \sup J$ et, lorsque $t \rightarrow t^+$, $x(t)$ sort définitivement de tout compact de U .

De même dans le passé (solutions maximales à gauche)¹.

* Trajectoires périodiques :

Période : $t_4 - t_3$.

$$(E) \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{avec } a, b, c, d \geq 0 \\ \text{et } x_0, y_0 \geq 0$$

Démonstration:

1) Existence et unicité

Posons $y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $F(y) = \begin{bmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{bmatrix}$

$$F \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \text{Poc. lip.}$$

Par le thm de C-L : $\exists!$ sol. max. à (E) qu'on note (y, I) avec $I \subset \mathbb{R}$.

2) Positivité

R.q.: * pour $(x_0, y_0) = (0, 0) \rightsquigarrow ((0, 0), \mathbb{R})$ sol.

* $x_0 = 0$ et $y_0 > 0 \rightsquigarrow ((0, y_0 e^{-ct}), \mathbb{R})$ sol.

* $x_0 > 0$ et $y_0 = 0 \rightsquigarrow ((x_0 e^{at}, 0), \mathbb{R})$ sol.

Donc, par unicité des sol. (trajectoire ne se croisent pas)
 $x(t), y(t) > 0, \forall t \in I$ pour $x_0, y_0 > 0$.

3) Pt d'équilibre

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = c/d \\ y = a/b \end{cases}$$

4) Quantité conservée

Posons $H(x, y) := dx + by - c \ln(x) - a \ln(y), x, y \in \mathbb{R}^{+*}$.

On a : $\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0 \Rightarrow H(x(t), y(t)) = C_0 \quad \forall t \in I$.

5) Sol. globale

Posons $f_{\alpha, \beta}(u) = \beta u - \alpha \ln(u), u \in \mathbb{R}^{+*}, \alpha, \beta > 0$.

On a:

$$f'_{\alpha, \beta}(u) = \beta - \frac{\alpha}{u} ; f''_{\alpha, \beta}(u) = \frac{\alpha}{u^2} > 0$$

Donc, $f_{\alpha, \beta}$ strict. convexe : $\exists!$ min à $f_{\alpha, \beta}$ en α/β .

De plus, $f_{\alpha, \beta}(u) \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{u \rightarrow 0} +\infty$.

De plus,

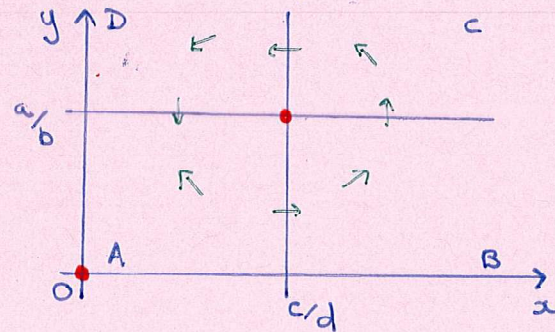
$$H(x(t), y(t)) = f_{a, b}(y(t)) + f_{c, d}(x(t)) = C_0$$

$$\Rightarrow f_{c, d}(x(t)) \leq C_0 - f_{a, b}(a/b)$$

Ainsi, $x(t)$ bornée sur I
 $y(t)$ " " "

Par le thm de sortie de tout compact : $I = \mathbb{R}$.

6) Portrait de phase



S.g. $(x_0, y_0) \in \text{EA}$ et par
l'absurde que $(x(t), y(t)) \in \text{EA}$
 $\forall t \in \mathbb{R}$.

On a : * $x(t) \nearrow +$ majoré par $c/d \rightsquigarrow \text{cu vers } x^*$

* $y(t) \searrow +$ minoré par $0 \rightsquigarrow \text{cu vers } y^*$

Et $\left. \begin{aligned} x^* > x(t) > 0 ; y^* < y(t) < \frac{a}{d} \\ (x^*, y^*) \text{ pt d'équilibre} \end{aligned} \right\} \text{ ABSURDE}$

Donc, $\exists t_1$ t.q. $x(t_1) = c/d$.

De même $t_2, t_3, t_4, t_5 \rightsquigarrow$ sol. périodique $\square$